

## Ćwiczenie 9

### BADANIE DYNAMICZNEGO TŁUMIKA DRGAŃ

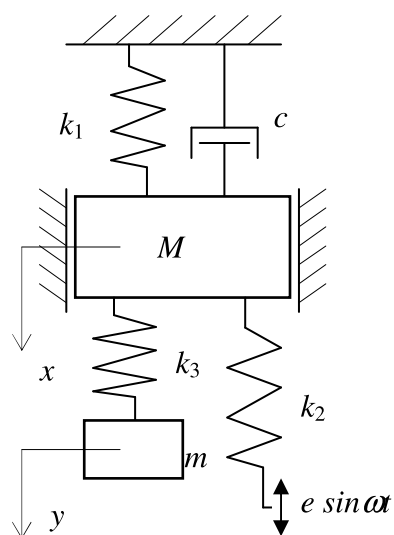
#### 1. Cel ćwiczenia

Wy tłumienie drgań układu o częstotliwości rezonansowej za pomocą dynamicznego tłumika drgań oraz wyznaczenie zakresu częstotliwości wymuszenia, w którym tłumik skutecznie oddziałuje na układ drgający.

#### 2. Wprowadzenie teoretyczne

Rozpatrywany jest model układu drgającego o dwóch stopniach swobody (Rys.3.1). Równania różniczkowe ruchu masy głównej  $M$  i masy  $m$  tłumika dynamicznego mają następującą postać:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x - k_3y &= k_2e \sin \omega t \\ m\ddot{y} + k_3y - k_3x &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$



Rys.3.1. Model układu drgającego

Po podzieleniu stronami obu równań przez masy otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{c}{M} \dot{x} + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{M} x - \frac{k_3}{M} y &= \frac{k_2 e}{M} \sin \omega t \\ y + \frac{k_3}{m} y - \frac{k_3}{m} x &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uwzględniając w równaniach (3.2) oznaczenia:

$$2h = \frac{c}{M}; a = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{M}; b = \frac{k_3}{M}; q = \frac{k_2 e}{M}; r = \frac{k_3}{m}, \quad (3.3)$$

otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h \dot{x} + a x - b y &= q \sin \omega t \\ y + r y - r x &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Rozwiązania szczególne układu równań (3.4) mają postać:

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ y &= C \sin \omega t + D \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Po wstawieniu rozwiązań do równań ruchu (3.4) otrzymuje się

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + 2h(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + \\ + aA \sin \omega t + aB \cos \omega t - bC \sin \omega t - bD \cos \omega t &= q \sin \omega t \\ -C\omega^2 \sin \omega t - D\omega^2 \cos \omega t + rC \sin \omega t + \\ + rD \cos \omega t - rA \sin \omega t - rB \cos \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aby równania te były spełnione w każdej chwili czasu, muszą być spełnione równania powstałe przez przyrównanie składników obu stron powyższych równań, zawierających oddzielnie wyrazy z  $\sin \omega t$  oraz  $\cos \omega t$ . Po uporządkowaniu powstaje układ 4 równań:

$$\begin{aligned} (a - \omega^2)A - 2h\omega B - bC + 0D &= q \\ 2h\omega A + (a - \omega^2)B + 0C - bD &= 0 \\ -rA + 0B + (r - \omega^2)C + 0D &= 0 \\ 0A - rB + 0C + (r - \omega^2)D &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Do wyznaczenia wartości składowych amplitud przemieszczeń  $A$ ,  $B$ ,  $C$  oraz  $D$  oblicza się wyznacznik główny układu równań algebraicznych (3.7):

$$W = \begin{vmatrix} (a - \omega^2) & -2h\omega & -b & 0 \\ 2h\omega & (a - \omega^2) & 0 & -b \\ -r & 0 & (r - \omega^2) & 0 \\ 0 & -r & 0 & (r - \omega^2) \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\text{czyli: } W = [(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2. \quad (3.9)$$

Stosując wzory Cramera oblicza się następujące wyznaczniki:

$$W_A = \begin{vmatrix} q & -2h\omega & -b & 0 \\ 0 & (a - \omega^2) & 0 & -b \\ 0 & 0 & (r - \omega^2) & 0 \\ 0 & -r & 0 & (r - \omega^2) \end{vmatrix} = q(r - \omega^2)(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br, \quad (3.10)$$

$$W_B = \begin{vmatrix} (a - \omega^2) & q & -b & 0 \\ 2h\omega & 0 & 0 & -b \\ -r & 0 & (r - \omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r - \omega^2) \end{vmatrix} = -2qh\omega(r - \omega^2)^2. \quad (3.11)$$

Amplitudy składowych drgań masy głównej  $M$  określają wzory:

$$A = \frac{W_A}{W}; \quad B = \frac{W_B}{W}. \quad (3.12)$$

Amplitudę drgań masy układu głównego otrzymuje się sumując geometrycznie stałe  $A$  i  $B$

$$A_I = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{W_A^2 + W_B^2}}{W}. \quad (3.13)$$

Po uwzględnieniu (3.9), (3.10) i (3.11) w (3.13) jest

$$A_I = \frac{q\sqrt{(r - \omega^2)^2} \sqrt{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2}}{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2}, \quad (3.14)$$

stąd:

$$A_I = q \frac{|r - \omega^2|}{\sqrt{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]^2 + 4h^2\omega^2(r - \omega^2)^2}}. \quad (3.15)$$

Przy braku dynamicznego tłumika drgań (braku masy  $m$  i sprężyny  $k_3$ ), czyli  $b = r = 0$ , stąd  $a = (k_1 + k_2)/M = \alpha^2$ , otrzymuje się znany wzór

$$A_0 = q \frac{|-\omega^2|}{\sqrt{(a - \omega^2)^2\omega^4 + 4h^2\omega^2\omega^4}} = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \quad (3.16)$$

określający amplitudę drgań układu liniowego o jednym stopniu swobody. Kąt przesunięcia fazowego między wymuszeniem a ruchem masy  $M$  jest określony wzorem:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \arctan \frac{B}{A} = \frac{-2qh\omega(r - \omega^2)^2}{q(r - \omega^2)[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br]} = \\ &= \frac{-2h\omega(r - \omega^2)}{(a - \omega^2)(r - \omega^2) - br}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

## 2.1. Przykład analitycznego wyznaczenia amplitudy $A_1$ oraz kąta przesunięcia fazowego $\varphi_1$ dla określonych parametrów układu

Przyjmując następujące wartości bezwymiarowych parametrów rozpatrywanego układu:

$$4 \times 2h = \frac{a}{2} = b = r = q = 1, \quad (3.18)$$

otrzymuje się wyrażenie na amplitudę drgań masy  $M$  w postaci:

$$A_I = \frac{|1 - \omega^2|}{\sqrt{[(2 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1]^2 + \frac{\omega^2}{16}(1 - \omega^2)^2}}, \quad (3.19)$$

oraz wzór na kąt przesunięcia fazowego:

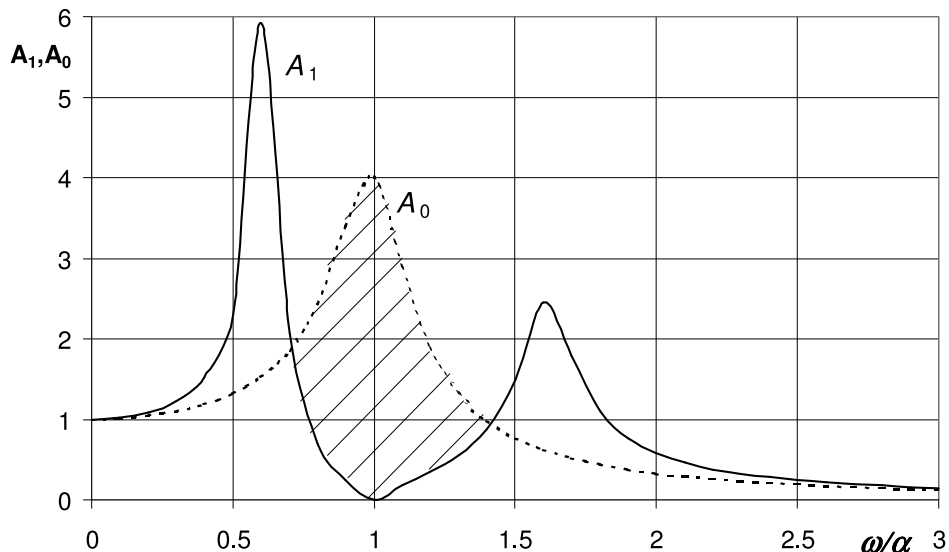
$$\varphi_I = \arctan \frac{-\frac{\omega}{4}(1 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1}. \quad (3.20)$$

Dla układu głównego bez dynamicznego tłumika drgań jest odpowiednio:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{16}}}; \quad \varphi_0 = \arctan \frac{-\omega}{4(1-\omega^2)}. \quad (3.21)$$

Zależności wartości amplitud  $A_1$  i  $A_0$  od częstości wymuszenia przedstawia Rys.3.2. Na tym rysunku został zakreślony obszar korzystnego oddziaływania tłumika.

Z analizy wzoru na amplitudę  $A_1$  i z rysunku 3.2 wynika, że dla częstości wymuszenia równej częstości drgań własnych tłumika ( $\omega^2 = r$ ) następuje całkowite wygaszenie drgań masy głównej  $M$ . Dla urządzeń pracujących przy stałej częstości należy nastroić tłumik na tę częstość pracy. Jeżeli częstość wymuszenia nie jest równa częstości drgań własnych tłumika, tłumienie jest niepełne i poza korzystnym przedziałem częstości fakt dołączenia tłumika dynamicznego pogarsza stan dynamiczny układu.



Rys.3.2. Porównanie wykresów rezonansowych

Częstości wymuszenia  $\omega$ , dla których amplitudy drgań układu głównego z tłumikiem oraz bez tłumika są sobie równe, obliczyć można przyrównując amplitudy  $A_1$  oraz  $A_0$ . Korzystając ze wzorów (3.15) i (3.16) otrzymuje się:

$$q \frac{|r - \omega^2|}{\sqrt{[(a - \omega^2)(r - \omega^2) - b r]^2 + 4 h^2 \omega^2 (r - \omega^2)^2}} = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4 h^2 \omega^2}}, \quad (3.22)$$

gdzie:  $a = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{M} = \frac{k_1}{M} + \frac{k_2}{M} + \frac{k_3}{M} = \alpha^2 + \frac{q}{e} + b$ .

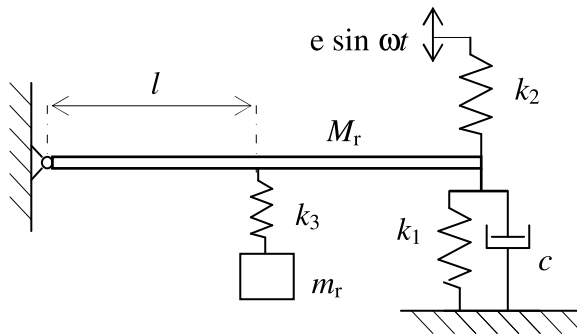
Porównanie amplitud (3.22) można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} (r - \omega^2)^2 \left[ (\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2 \right] = \\ = \left[ \left( \alpha^2 - \omega^2 + \frac{q}{e} + b \right) (r - \omega^2) - br \right]^2 + 4h^2\omega^2 (r - \omega^2)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wyznaczone z równości (3.23) wartości częstości wymuszenia  $\omega$  określają przedział korzystnego oddziaływania dynamicznego tłumika drgań.

### 3. Stanowisko pomiarowe

Budowę układu drgającego zwanego dalej układem głównym przedstawiono dokładnie w opisie stanowiska pomiarowego w ćwiczeniu 2. Do układu głównego dołączony został tłumik dynamiczny składający się z masy  $m_r$  i sprężyny płaskiej o sztywności  $k_3$ . Schemat układu drgającego wraz z tłumikiem przedstawia Rys.3.3. Sposób pomiaru amplitud i częstości wymuszenia opisano w ćwiczeniu 2.



Rys.3.3. Schemat stanowiska pomiarowego

### 4. Przebieg ćwiczenia

1. Doświadczalne wyznaczanie krzywej rezonansowej układu głównego.
  - a) Dla kolejnych wartości prędkości kątowych zadanych w tabeli pomiarowej należy zmierzyć wartości amplitud drgań układu bez dynamicznego tłumika drgań.
  - b) Na podstawie danych z tabeli pomiarowej sporządzić doświadczalny wykres rezonansowy dla układu bez tłumika.
  - c) Określić współrzędne wierzchołka wykresu rezonansowego ( $A_m, \omega_m$ ).

2. Obliczenia częstości drgań własnych układu głównego dokonuje się wg wzorów (2.10) zamieszczonych w opisie ćwiczenia 2.
3. Dobór dynamicznego tłumika drgań dla zadanej częstości. Należy wytłumić drgania wymuszone układu głównego o częstości równej jego częstości drgań własnych  $\alpha$ . Wtedy częstość drgań własnych dynamicznego tłumika drgań  $\alpha_r$  musi być równa częstości drgań własnych układu głównego  $\alpha$ . Długość  $l$  sprężyny tłumika dynamicznego musi być zatem tak dobrana, aby spełniony był warunek

$$\alpha_r = \alpha. \quad (a)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wraz ze zmianą długości sprężyny  $l$  ulegają zmianie sztywność sprężyny  $k_{3r}$ , oraz masa zredukowana  $m_r$  biorąca udział w ruchu. Obie te wielkości mają wpływ na wartość  $\alpha_r$ . Wartości  $k_{3r}$  i  $m_r$  można otrzymać wykorzystując w obliczeniach np. metodę Rayleigh'a

$$k_{3r} = \frac{3EJ}{l^3}; \quad m_r = m + \frac{1}{5}\mu l, \quad (b)$$

gdzie:

$E$  – moduł sprężystości podłużnej materiału sprężyny płaskiej,

$J$  – moment bezwładności przekroju sprężyny zginanej,

$\mu = \frac{m_b}{l}$  – masa jednostkowa belki (sprężyny).

Ponieważ częstość drgań własnych dynamicznego tłumika drgań określa zależność

$$\alpha_r^2 = \frac{k_{3r}}{m_r}, \quad (c)$$

to po wstawieniu (b) do (c) oraz uwzględnieniu warunku (a), otrzymuje się po przekształceniach

$$\frac{1}{5}\alpha^2\mu l^4 + \alpha^2 ml^3 - 3EJ = 0. \quad (d)$$

Równanie (d) jest równaniem czwartego stopnia z niewiadomą  $l$  i w trakcie wykonywania ćwiczenia rozwiązywane jest metodą numeryczną. W wyniku otrzymujemy poszukiwaną długość  $l$  sprężyny płaskiej dynamicznego tłumika drgań.

4. Doświadczalne wyznaczenie krzywej rezonansowej dla układu głównego z dynamicznym tłumikiem drgań. Przeprowadza się analogicznie jak pomiary dla uzyskania krzywej rezonansowej bez dynamicznego tłumika (punkt 1).
5. Z porównania obu wykresów rezonansowych odczytuje się wartości częstości wymuszenia  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , dla których amplitudy drgań układu głównego z tłumikiem dynamicznym i bez niego są sobie równe. Należy sprawdzić zgodność otrzymanych wyników ze wzorem (3.23).

## 5. Literatura

1. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
2. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
3. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.

## 6. Sprawozdanie z wykonania ćwiczenia winno zawierać:

- 1) Cel ćwiczenia;
- 2) Tabelę pomiarową w następującej postaci:

Częstości drgań		Układ bez tłumika	Układ z tłumikiem
Numer pomiaru	Prędkość kątowna silnika	Amplituda drgań	Amplituda drgań
i	$\omega_i$ [rd/s]	$A_i$	$A_i$
0	0		
1	18,8		
2	25,1		
3	31,4		
4	34,5		
5	37,6		
6	40,7		
7	43,9		
8	47,0		
9	50,2		
10	56,5		
11	62,7		
12	69,0		



- 3) Wykresy rezonansowe:  
- wykres rezonansowy układu głównego bez dynamicznego tłumika drgań,  
- wykres rezonansowy układu głównego z dynamicznym tłumikiem drgań;
- 4) Częstość drgań własnych układu głównego obliczoną wg wzoru 2.13 (ćwiczenie 2):

$$\alpha^2 = \frac{\omega_m^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2}}$$

- 5) Obliczenie czynnej długości  $l$  sprężyny płaskiej tłumika;  
6) Obliczenie wartości częstości  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$ , przy których amplitudy drgań układu głównego pozbawionego tłumika oraz z tłumikiem są sobie równe;  
7) Sprawdzenie zgodności otrzymanych wartości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  ze wzorem (3.23);  
8) Wnioski.