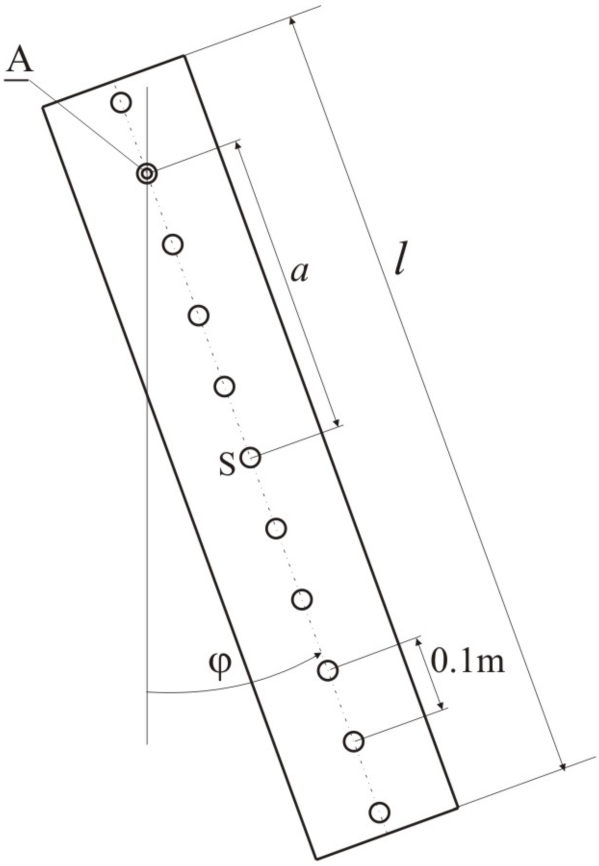
## Ćwiczenie 2
## Wyznaczanie minimalnego okresu drgań swobodnych wahadła fizycznego.

**Cel ćwiczenia**

Celem ćwiczenia jest określenie, takiego położenia osi obrotu wahadła fizycznego, dla którego okres drgań swobodnych tego wahadła jest najkrótszy.

**Opis stanowiska**

Przedmiotem rozważań jest wahadło fizyczne mające postać jednorodnego pręta o długości $l$=1.03 metra, mogące wykonywać ruch wahliwy wokół osi obrotu A. Wahadło zostało przedstawione na rysunku 1




Rysunek 1

Na podstawie dynamicznego równania ruchu obrotowego bryły (równania równowagi momentów sił względem osi obrotu, z uwzględnieniem momentu siły bezwładności) można sformułować następujące równanie ruchu wahadła:

$$B_A\ddot{\phi} + mga\phi = 0 \qquad (1)$$

gdzie:
$B_A$ – moment bezwładności względem osi obrotu,
$m$ - masa,
$g$ – przyspieszenie ziemskie równe 9.81 m/s$^2$,
$a$ – odległość pomiędzy osią przechodzącą przez środek masy $S$ a osią obrotu,
φ - kąt obrotu.

Okres drgań swobodnych tego wahadła wynosi:

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{B_A}{mga}}. \qquad (2)$$

*Czy wiesz jak rozwiązać równanie (1) i wyprowadzić wzór (2)???*

W myśl twierdzenia Steinera o momentach bezwładności bryły względem osi równoległych

$$B_A = B_S + ma^2 \tag{3}$$

gdzie:
$B_S$ – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy.

Moment $B_S$ jest stały i w przypadku analizowanego wahadła, mającego postać jednorodnego pręta, wyraża się wzorem

$$B_S = \frac{ml^2}{12} \tag{4}$$

Podstawiając równanie (3) do równania (2) otrzymuje się następujący wzór na okres drgań wahadła:

$$T_A(a) = 2\pi\sqrt{\frac{B_S + ma^2}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} \tag{5}$$

Jak zaznaczono, okresowi drgań można nadać postać funkcji, której argumentem jest odległość $a$ pomiędzy osią obrotu a osią przechodzącą przez środek masy.
Łatwo stwierdzić, że gdy odległość $a$ maleje do zera (oś obrotu zbliża się do środka masy), okres drgań rośnie do nieskończoności: licznik wyrażenia pod pierwiastkiem dąży do stałej wartości $B_S$ a mianownik dąży do zera.
Podobnie łatwo stwierdzić, że gdy odległość $a$ rośnie do nieskończoności (oś obrotu oddala się do środka masy na nieograniczoną odległość wielokrotnie większą niż $l$), okres drgań także rośnie do nieskończoności: pochodna licznika wyrażenia pod pierwiastkiem ($2ma$) dąży do nieskończoności a pochodna mianownika jest stała ($mg$). Powstaje pytanie, dla jakiej wartości argumentu $a$ funkcja (5) osiąga wartość ekstremalną i ile ta wartość wynosi.
Dla znalezienia odpowiedzi należy zróżniczkować (5) po zmiennej $a$, otrzymując:

$$\frac{\mathrm{d}T_A(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{B_S + ma^2}{mga}}}\,\frac{2m^2a^2g - (B_S + ma^2)mg}{m^2g^2a^2} = \frac{\pi\left(a^2 - \frac{l^2}{12}\right)}{\sqrt{\frac{gl^2a^3}{12} + ga^5}} \tag{6}$$

Łatwo zauważyć, że funkcja ta osiąga wartość zero dla

$$\frac{\mathrm{d}T_A(a)}{\mathrm{d}a} = 0 \Rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{12}} \tag{7}$$

i jest to jedyne ekstremum – logika podpowiada, że jest to minimum. Okres drgań $T_A$ jest najkrótszy dla odległości $a$ równej długości wahadła podzielonej przez pierwiastek z liczby 12. Podstawiając tę wartość do (5), można obliczyć

$$T_{A\min} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + m\frac{l^2}{12}}{mg\frac{l}{\sqrt{12}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{12}l}{6g}} \qquad (8)$$

Należy sprawdzić, czy istotnie dla wartości $a$ wyrażonej przez (7), funkcja (5) osiąga ekstremum minimum a nie maksimum. W tym celu, różniczkując (6) określmy drugą pochodną okresu $T_A$ po odległości $a$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_A(a)}{\mathrm{d}a^2} = \pi\frac{2a\sqrt{\frac{gl^2a^3}{12} + ga^5} - \left(a^2 - \frac{l^2}{12}\right)\frac{5ga^4 + \frac{3gl^2a^2}{12}}{2\sqrt{\frac{gl^2a^3}{12} + ga^5}}}{\frac{gl^2a^3}{12} + ga^5} \qquad (9)$$

Wzór wygląda PRZERAŻAJĄCO – każdy to widzi; ale: dla $a = \frac{l}{\sqrt{12}}$ wyrażenie w nawiasie w liczniku jest równe zeru, zatem drugi składnik licznika jest równy zeru. Pierwszy składnik jest dodatni, mianownik jest dodatni, czyli

$a = \frac{l}{\sqrt{12}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 T_A(a)}{\mathrm{d}a^2} > 0$ zatem istotnie dla tej wartości $a$ okres jest minimalny!!!

**Przebieg ćwiczenia:**

Określić czas trwania 20 okresów ruchu wahadła zawieszonego kolejno za pomocą pięciu otworów odległych od środka masy o 0.50, 0.40, 0.30, 0.20 i 0.10 metra. Dzieląc ten czas przez 20 określić okresy drgań $T_A$ w funkcji $a$.
Za pomocą wzoru (5) obliczyć $T_A$ dla różnych wartości $a$ podanych w tabeli.
Narysować teoretyczny wykres $T_A$ ($a$). Nanieść wyniki pomiarów.
No i co – podobne????? Właśnie przewidywaniu zachowania układów rzeczywistych służą takie obliczenia…

Imię i Nazwisko:……………………..…….. Grupa:………………Ocena:………..

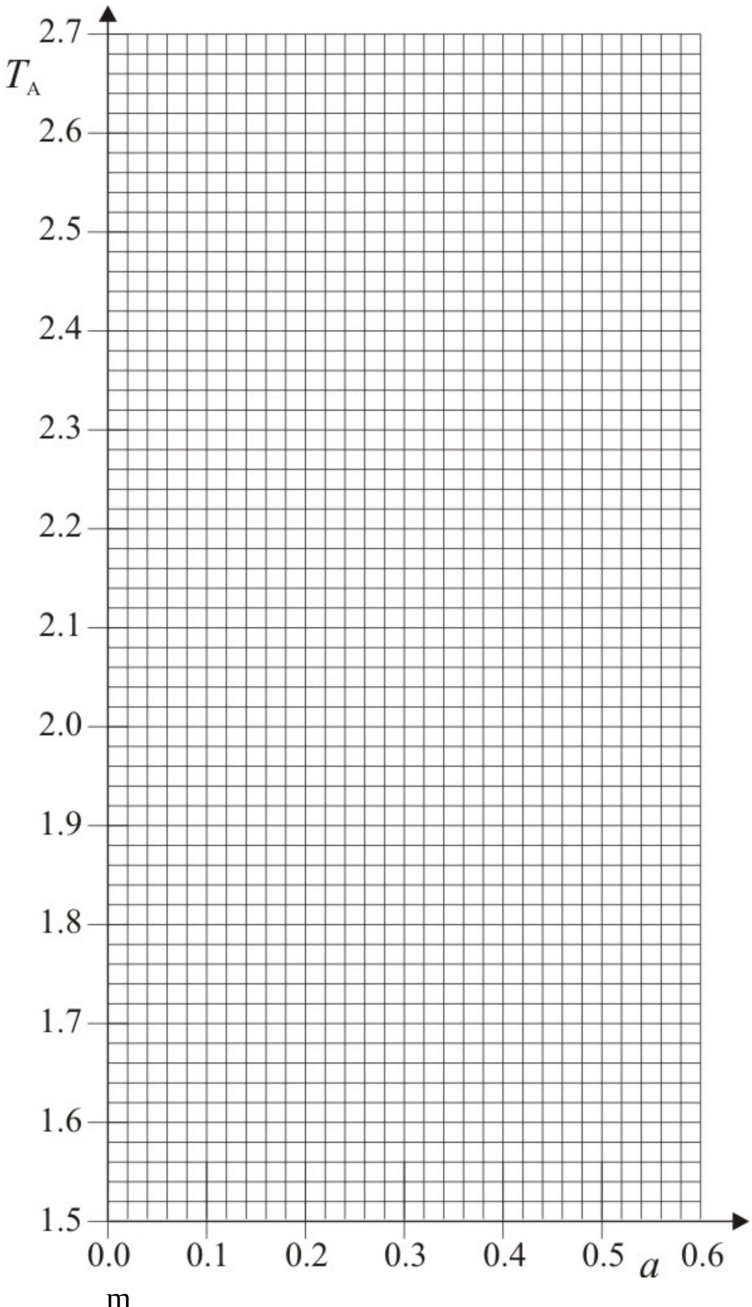
**Sprawozdanie z ćwiczenia 2**
**Wyznaczanie minimalnego okresu drgań swobodnych wahadła fizycznego.**

Wyniki pomiarów:

| $a$ | $20T_A$ | $T_A$ |
|---|---|---|
| 0.10 | | |
| 0.20 | | |
| 0.30 | | |
| 0.40 | | |
| 0.50 | | |

Wyniki obliczeń

| $a$ | $T_A$ |
|---|---|
| 0.05 | |
| 0.10 | |
| 0.15 | |
| 0.20 | |
| 0.25 | |
| 0.30 | |
| 0.35 | |
| 0.40 | |
| 0.45 | |
| 0.50 | |
| 0.55 | |
| 0.60 | |




Wzór do obliczania okresu drgań:

$$T_A(a) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12}+a^2}{ga}}, \quad l = 1.03\text{m}, \quad g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$