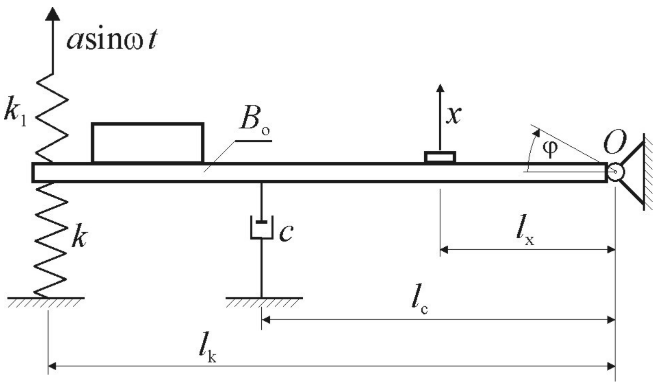
Ćwiczenie 3
Identyfikacja parametrów układu drgającego o jednym stopniu swobody

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest określenie wartości współczynnika tłumienia, współczynnika sztywności oraz amplitudy wymuszenia układu drgającego o jednym stopniu swobody.



Rysunek 1.

Na rysunku 1 przedstawiono układ drgający złożony z następujących elementów:
- sztywna belka połączona z ostoją węzłem obrotowym *O*
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności *k*,
- tłumik olejowy o współczynniku tłumienia *c*,
- zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1.

Zespół sprężyn o współczynniku sztywności k_1 połączony jest z mimośrodem na wale silnika napędowego; obracanie się wału silnika stanowi kinematyczne wymuszenie ruchu górnych końców tych sprężyn, opisane jako $a\sin\omega t$. Wskutek wymuszenia, belka wychyla się z położenia równowagi o kąt φ. Wychylenie belki mierzone jest czujnikiem przemieszczenia liniowego, określającego przemieszczenie *x* punktu belki oddalonego o l_x od osi obrotu.
Równanie ruchu liniowego modelu fizycznego badanego układu jest następujące:

$$B_o\ddot{\varphi} + cl_c^2\dot{\varphi} + (k + k_1)l_k^2\varphi = k_1 l_k a\sin\omega t \qquad (1)$$

gdzie:
B_o – moment bezwładności belki względem osi obrotu,

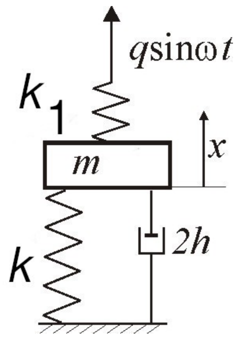
Dzieląc równanie (1) przez B_o i mnożąc przez l_x otrzymuje się

$$l_x\ddot{\varphi} + \frac{cl_c^2}{B_o}l_x\dot{\varphi} + \frac{(k + k_1)l_k^2}{B_o}l_x\varphi = \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0}\sin\omega t \qquad (2)$$

Oznaczając:

$$l_x\ddot{\phi} = \ddot{x}, \quad \frac{cl_c^2}{B_o} = 2h, \quad l_x\dot{\phi} = \dot{x}, \quad \frac{(k+k_1)l_k^2}{B_o} = \alpha^2, \quad l_x\phi = x, \quad \frac{k_1 l_k a l_x}{B_0} = q, \qquad (3)$$

można zapisać równanie (1) w postaci równania ruchu równoważnego układu w ruchu postępowym jako:



$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = q \sin \omega t \qquad (4)$$

gdzie:

$2h$	tłumienie
α^2	częstość kołowa swobodnych drgań układu
q	wymuszenie kinematyczne,

równoważna masa *m* jest tu wartością tylko obliczeniową.

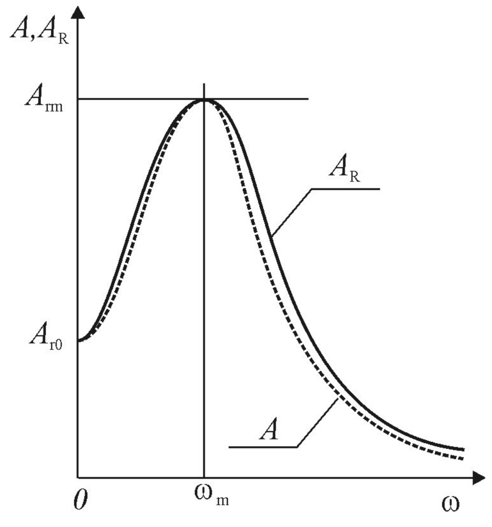
Rysunek 2

Rozwiązaniem szczególnym równania (4), opisującym drgania wymuszone modelu fizycznego badanego układu, pokazanego na rysunku 2, jest funkcja

$$x = A\sin(\omega t + \beta), \qquad (5)$$

gdzie A jest amplitudą drgań wymuszonych, a β - kątem fazowym pomiędzy przebiegiem wymuszenia kinematycznego a przebiegiem drgań modelu fizycznego.
Amplituda A wyrażona jest wzorem:

$$A = \frac{q}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \omega^2\right)^2 + 4h^2\omega^2}}. \qquad (6)$$



Rysunek 3

Wyznaczenie wartości parametrów α, *h*, *q*, to właśnie jest zadanie, które można rozwiązać następująco:
Dokonując pomiaru amplitudy drgań układu rzeczywistego przy różnych wartościach częstości kołowej wymuszenia, otrzymuje się rzeczywisty wykres rezonansowy $A_r(\omega)$, przedstawiony na rysunku 3 linią ciągłą.
Wartość amplitudy drgań układu rzeczywistego dla małej (praktycznie równej zeru) wartości częstości kołowej ω, oznaczono jako A_{R0}. Amplituda osiąga wartość maksymalną A_{Rm} przy częstości rezonansowej ω_m.
Teoretyczny wykres rezonansowy, przedstawiony na rysunku 3 linią przerywaną wynika z obliczeń wartości amplitudy drgań A za pomocą wzoru (6).

Zakłada się, że oba wykresy rezonansowe muszą spełniać trzy warunki:

1. Dla częstości kołowej ω bliskiej zeru, amplitudy *A* i A_R są takie same:

$$A(0)=\frac{q}{\sqrt{\left(\alpha^2-0^2\right)^2+4h^2 0^2}}=\frac{q}{\alpha^2}=A_{R0}. \tag{7}$$

2. Dla częstości kołowej rezonansowej ω_m, amplitudy *A* i A_R są także takie same:

$$A(\omega_m)=\frac{q}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega_m^2\right)^2+4h^2\omega_m^2}}=A_{Rm}. \tag{8}$$

3. Dla częstości ω_m, amplituda *A* osiąga wartość maksymalną (podobnie jak A_R):

$$\frac{\partial A}{\partial \omega}_{(\omega=\omega_m)}=\frac{q\left[-4\omega\left(\alpha^2-\omega^2\right)+8h^2\omega\right]}{2\sqrt{\left(\left(\alpha^2-\omega_m^2\right)^2+4h^2\omega^2\right)^3}}=0 \tag{9}$$

Układ równań (7), (8), (9) można łatwo przekształcić do postaci

$$q=\frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi},\quad \alpha^2=\frac{\omega_m^2}{\xi},\quad 2h=\omega_m\sqrt{\frac{2-2\xi}{\xi}}$$
$$\text{gdzie }\ \xi=\sqrt{1-\frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}} \tag{10}$$

co pozwala na obliczenie nieznanych wartości parametrów α, *h*, *q*.
Znajomość tych wartości pozwala na identyfikację parametrów układu rzeczywistego na podstawie wzorów:

$$c=\frac{2hB_0}{l_c},\quad k_1=\frac{qB_0}{l_k l_x a},\quad k=\frac{B_0\alpha^2}{l_k^2}-k_1. \tag{11}$$

Które uzyskano przekształcając wzory (3).
Pomiary dokonane wcześniej dostarczają wartości parametrów:

$$B_0=1.38\ \text{kgm}^2,\quad l_c=0.54\ \text{m},\quad l_k=0.54\ \text{m},\quad l_x=0.24\ \text{m},\quad a=0.003\,m. \tag{12}$$

Przebieg ćwiczenia:

Proszę zapoznać się z filmem prezentującym sposób wykonania ćwiczenia. Pokazane są na nim przykładowe wyniki pomiarów amplitudy drgań A_R. Wyniki te należy wykorzystać podczas samodzielnych obliczeń.

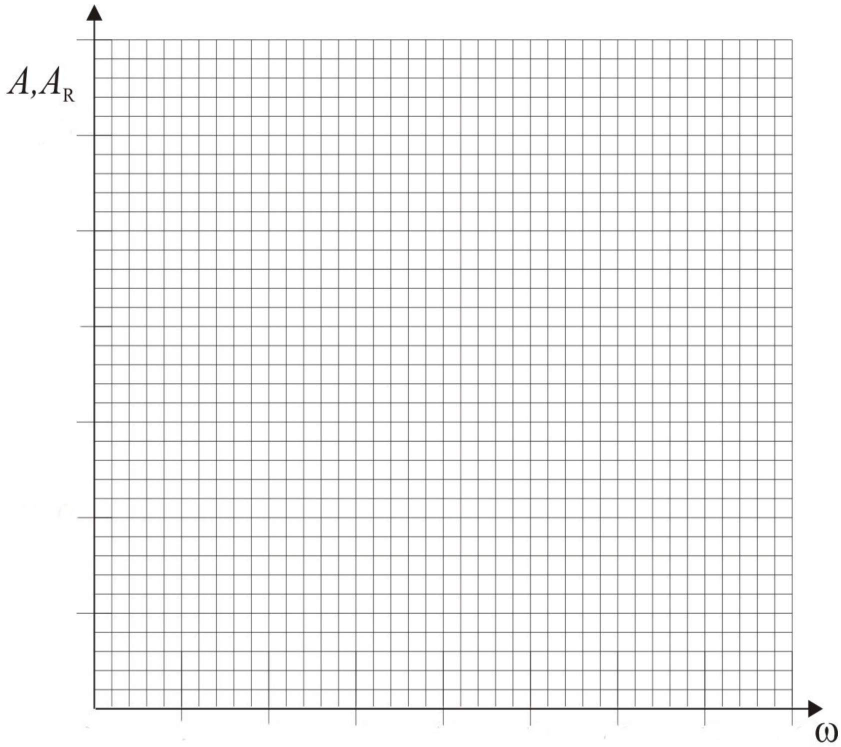
1. Ustalić wartość ω_m, dla której amplituda drgań osiąga wartość maksymalną A_{Rm}. Ustalić wartość amplitudy A_{R0} przy bliskiej zeru prędkości kątowej. Wyniki wpisać do tabeli.
2. Obliczyć wartości parametrów *α*, *h*, *q*, korzystając ze wzorów (10).
3. Obliczyć wartości amplitudy *A* teoretycznego wykresu rezonansowego, korzystając ze wzoru (6), dla tych wartości ω, dla których dokonano pomiaru A_R.
4. Narysować rzeczywisty i teoretyczny wykres rezonansowy.
5. Obliczyć wartości parametrów układu rzeczywistego *k*, *c*, k_1 , korzystając ze wzorów (11) i wartości parametrów podanych w (12).

Imię i Nazwisko:………………………..…….. Grupa:………………Ocena:………..

Sprawozdanie z ćwiczenia 3
Identyfikacja parametrów układu drgającego o jednym stopniu swobody

Wyniki pomiarów:

ω	A_R [mm]	A



ω_m= [….]; A_{Rm}= […..]; A_{R0}= [….]

Obliczenia parametrów modelu fizycznego:

$$\xi=\sqrt{1-\frac{A_{R0}^2}{A_{Rm}^2}}= \quad [.......]; \quad q=\frac{\omega_m^2 A_{R0}}{\xi}= \quad [.....]; \quad \alpha^2=\frac{\omega_m^2}{\xi}= \quad [.......]; \quad 2h=\omega_m\sqrt{\frac{2-2\xi}{\xi}}=[......]$$

Wzór do obliczania amplitudy drgań modelu fizycznego

$$A=\frac{q}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega^2\right)^2+4h^2\omega^2}}= \quad [\ ....]$$

Obliczenia parametrów układu rzeczywistego:

$$B_0=1.38\ \text{kgm}^2,\ \ l_c=0.54\ \text{m},\ \ l_k=0.54\ \text{m},\ \ l_x=0.24\ \text{m},\ \ a=0.003\ \text{m}. \qquad (12)$$

$$c=\frac{2hB_0}{l_c^2}= \quad [.......] \quad k_1=\frac{qB_0}{l_k l_x a}= \quad [........] \quad k=\frac{B_0\alpha^2}{l_k^2}-k_1= \quad [.....]$$